Miskolczi, l'amosfera ed il viriale

Il teorema del viriale nasce, ad opera di Clausius, con l'intento di descrivere le forze agenti su un gas reale le cui molecole non avessero dimensioni nulle e non fossero prive di reciproche interazioni, in pratica esso è un perfezionamento della teoria cinetica dei gas.
Lo scopo che ci prefiggiamo è di verificare se tale teorema è applicabile all'atmosfera, come asserito da Miskolczi nella sua ipotesi sui bilanci energetici planetari.

Definiamo la quantità scalare:

$$A = mv \cdot r \tag{1}$$

dove ***m*** è la massa della particella ***v*** la sua velocità ed ***r*** il vettore posizione.

Derivando rispetto al tempo otteniamo:

$$\frac{dA}{dt} = m\frac{dv}{dt} \cdot r + mv\frac{dr}{dt} = ma \cdot r + mv^2 \tag{2}$$

da cui si ottiene per sostituzione:

$$\frac{dA}{dt} = F \cdot r + 2E_K \tag{3}$$

ora veniamo ai passaggi cruciali; ricaviamo la media nel tempo dell'equazione:

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{MEDIA} = (F \cdot r)_{MEDIA} + 2(E_K)_{MEDIA} \tag{4}$$

in base alle regole per la media nel tempo di una funzione otteniamo:

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{MEDIA} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dA}{dt}dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dA = \frac{A - A_0}{\tau} \tag{5}$$

consideriamo la velocità costante, cosi da poter trascurare di occuparci di essa, in effetti dobbiamo considerare la sua velocità media che in virtù del teorema dell'equipartizione dell'energia molecolare in un tempo medio indicato dall'equazione 4 è costante; inoltre visto che il teorema si applica ad una generica temperatura, il considerare una velocità media ci consentirà di risparmiare fatica, visto è considerato che ai fini climatici eventuali cambiamenti di temperatura media non comportano una modificazione dell'equazioni e della validità del viriale.

Prendendo il risultato della 5 e esplicitandone i termini in base alla 1 vediamo:

$$\frac{A - A_0}{\tau} = \frac{(mv \cdot r) - (mv \cdot r_0)}{\tau} \tag{6}$$

affinché il teorema del viriale sia valido la quantità media in un tempo τ espressa dall'equazione 5 (e 6) dev'essere pari a zero, in tal caso l'equazione 4 può scriversi nella semplice forma:

$$(E_K)_{MEDIA} = -\frac{1}{2}(F \cdot r)_{MEDIA} \tag{7}$$

il membro di destra è definito come il viriale del sistema (in questo caso composto dalla sola particella), in base all'equazione il viriale deve intendersi come agente in media su un certo numero di spostamenti del vettore posizione ***r*** .
Dalla definizione di energia potenziale abbiamo:

$$U(r) = \int_A^B F \cdot dr$$

se integriamo (ricordiamoci che la F è costante) e consideriamo un certo numero di spostamenti medi, sostituendo nella 7 abbiamo:

$$(E_K)_{MEDIA} = -\frac{1}{2}(U)_{MEDIA} \tag{8}$$

quest'ultima è l'espressione che cercavamo, la quale unisce l'energia cinetica all'energia potenziale intesa in senso generico; noi considereremo l'energia potenziale gravitazionale.
Prima di affrontare l'applicazione del teorema del viriale ad un gas di molte particelle ed all'atmosfera terrestre è utile studiare nei dettagli l'equazioni 5 e 6 nella loro apparente semplicità.
Affinché si possa giungere all'espressione del viriale dell'equazione 7 ed 8 è necessario che il termine dell'equazione 7 in un certo tempo diventi zero o gli si avvicini indefinitamente. In effetti l'intero campo di applicazione dell'equazione del viriale propriamente detta (eqn. 8) dipende unicamente da questo. Il punto cruciale ruota intorno alla seguente domanda:

Quanto deve essere grande il tempo τ affinché l'equazione 6 vada a 0?

In merito a questa domanda possiamo iniziare col notare che l'equazione 5 si può trovare in letteratura scritta in 2 differenti modi: un modo essenzialmente fisico (come nell'equazione 5) in cui non si specifica esattamente la grandezza del tempo ma si usa definirlo "un tempo sufficientemente grande", ed in un modo rigorosamente matematico facendo ricorso al concetto di limite:

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{MEDIA} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t}\int_0^t \frac{dA}{dt}dt = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t}\int_0^t dA = \lim_{t \to \infty} \frac{A - A_0}{t} = 0 \tag{9}$$

la comparsa degli infiniti nelle equazioni fisiche è sempre stata motivo di grandi discussioni o meglio di grossi turbamenti, essendo un infinito assolutamente privo di ogni possibile applicazione pratica, in parole povere assolutamente irragionevole se applicato ai reali processi fisici che si svolgono con grandezze finite. Nel nostro caso ad esempio un tempo infinito non ha un vero senso fisico, i processi della dinamica dei gas, per il quale il teorema del viriale è stato sviluppato, si svolgono non solo in un tempo finito, ma assai piccolo rispetto all'intervallo temporale di riferimento, ossia il "Secondo" (*s* o *sec*). Queste sono le ragioni per cui i testi di fisica sono pieni d'espressioni tipo "un tempo sufficientemente grande", anche a scapito del rigore puramente matematico.

Notiamo che l'equazione 6 può andare a zero non solo al crescere all'infinito del tempo posto al denominatore, ma anche all'approssimarsi del numeratore a 0, ed anche in quest'ultimo caso il teorema del viriale risulta applicabile.

Consideriamo ora un alto numero di particelle che compone un gas, anche in questo caso le equazioni conservano la loro forma, la 1 deve essere riscritta per includere tutte le particelle:

$$A = m_1 v_1 \cdot r_1 + m_2 v_2 \cdot r_2 + ... + m_n v_n \cdot r_n \qquad (10)$$

in un gas le velocità molecolari sono molto diverse ma distribuite secondo la maxwelliana, inoltre per ogni temperatura è presente una precisa velocità media, ed a quella ci riferiremo per semplicità. Tutte le equazioni precedenti rimangono valide sostituendo la 10 al posto della 1, ed ora la 6 risulta semplicemente:

$$\frac{A - A_0}{\tau} = \frac{(m_1 v_1 \cdot r_1) - (m_1 v_1 \cdot (r_1)_0)}{\tau} + \frac{(m_2 v_2 \cdot r_2) - (m_2 v_2 \cdot (r_2)_0)}{\tau} + ... + \frac{(m_n v_n \cdot r_n) - (m_n v_n \cdot (r_n)_0)}{\tau}. \qquad (11)$$

in pratica si tiene conto dello spostamento di ogni singola particella che compone il gas.

Ora risulta abbastanza agevole stabilire il tempo necessario affinché la 11 vada a zero.
Se prendiamo in considerazione lo spostamento di ciascuna particella in un qualsivoglia intervallo di tempo ci rendiamo subito conto che esso è diverso da zero, in altre parole ciascuno dei termini dell'equazione 11 è in media diverso da zero; tuttavia in seno ad un gas le molecole si sposteranno ciascuna in una direzione diversa ma di una quantità Δr che in valore assoluto ammette una media, che prende il nome di cammino libero medio; gli scostamenti dal valore medio di ciascun termine tendono a compensarsi vicendevolmente, sicché i termini dell'equazione 11 si elidono in maniera pressoché esatta (in termini fisici significa che la pressione a livello macroscopico di un gas è costante, e che il gas è statico), portando il numeratore a zero (tale valore rimane inoltre costante nel tempo), nel tempo necessario a costituire la media Δr del cammino libero medio. Per Un gas a temperatura e pressione atmosferica al livello del mare tale tempo è pari a circa 5×10^{-10} secondi, questo significa che il teorema del viriale per un gas è valido in senso statistico per intervalli uguali o superiori al tempo impiegato affinché le molecole percorrano il cammino libero medio.
I termini dell'equazione 11 hanno validità in senso stretto per il lasso tempo necessario a percorrere il libero cammino medio, dopo di ciò le molecole a causa dell'urto avranno cambiato direzione, verso e velocità, tuttavia la validità dei termini in senso lato è intatta perché sia perché si possono mediare le velocità e gli spostamenti, sia perché l'equazione generale conserva esattamente la stessa identica forma, visto che le quantità considerate per tutte le molecole si conservano perfettamente (in un sistema chiuso posto all'equilibrio termico), a tal riguardo l'aver considerato le velocità costanti per la nostra analisi era motivato dalla conservazione della velocità media molecolare.

In realtà in seno ad un gas nel lasso di tempo considerato esistono fluttuazioni locali dei valori medi della pressione e temperatura (e di conseguenza delle velocità molecolari), che sono ampiamente trattate dalla teoria classica delle fluttuazioni, ad esse dobbiamo ad esempio l'azzurro del cielo. Tuttavia tali fluttuazioni sono anch'èsse assolutamente casuali ed a simmetria sferica (avvengono in egual misura in tutte le direzioni), e la loro teoria delle probabilità ci dice che sono limitate nello spazio (lo scostamento netto è inversamente proporzionale al numero delle molecole in gioco), e soprattutto nel tempo, e ancora una volta il tempo in questione è il tempo impiegato per percorrere il cammino libero medio, dopo di che gli urti ed i cambiamenti di direzione e verso annulleranno le fluttuazioni esistenti per costituirle in altri punti. Ancora una volta la sommatoria netta degli spostamenti dei termini dell'equazione 11 dovuti alle fluttuazioni di densità si annullano vicendevolmente nel lasso di tempo considerato.

Possiamo finalmente giungere ad analizzare l'applicabilità all'atmosfera del teorema del viriale, per far ciò iniziamo col prendere un sistema di riferimento conveniente ad esempio il centro della terra, poi idealmente facciamo passare per tale centro tre piani perpendicolari tra loro, in modo da dividere l'intera terra e sopratutto l'atmosfera in 8 quadranti, con l'origine posta proprio al centro della terra, questo sistema ci consentirà di focalizzare mentalmente i flussi delle molecole, e se troveremo che la risultante degli spostamenti molecolari, in un qualsivoglia intervallo di tempo minore di infinito, si troverà al centro del nostro sistema di coordinate allora il teorema del viriale risulterà applicabile all'atmosfera altrimenti non lo sarà.

Immaginiamo di "congelare" idealmente tutte le molecole dell'atmosfera nella loro posizione, in seguito, partendo dallo zero del nostro sistema di riferimento (centro della terra), portiamo un vettore posizione ***r*** a ciascuna molecola o atomo presente nell'atmosfera, da questo istante e per ciascuna posizione determiniamo la quantità A_0 necessaria per costituire il punto di riferimento nell'equazione 11. Dopo aver fatto ciò "scongeliamo" tutte le molecole, e per prima cosa notiamo che oltre all'agitazione molecolare che avevamo analizzato finora, c'è anche traslazione di masse d'aria per varie cause. Per semplificare la trattazione scomponiamo la velocità totale delle particelle nella somma della velocità di traslazione termica e nella velocità dovuta a cause di dinamica dell'atmosera: $\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}_D$, inoltre tenendo a mente anche la scomposizione degli spostamenti dovute alle diverse componenti della velocità possiamo riscrivere la 11 per l'atmosfera:

$$\frac{A - A_0}{\tau} = \sum_n \frac{m_n v_n \cdot (r_n - (r_n)_0)}{\tau} + \frac{(M_1 v_1 \cdot r_1) - (M_1 v_1 \cdot (r_1)_0)}{\tau} + ... + \frac{(M_m v_m \cdot r_m) - (M_m v_m \cdot (r_m)_0)}{\tau}. \quad (12)$$

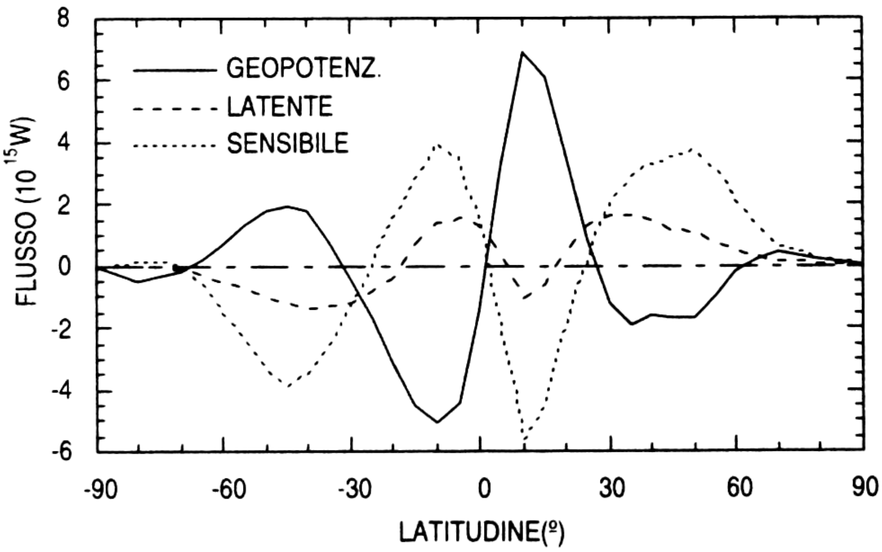
il primo termine del secondo membro che è sotto sommatoria altro non è che la precedente equazione 11 per un gas in quiete (scritta solo in maniera più sintetica per motivi di spazio), e sappiamo che va a zero in un tempo assai breve, di conseguenza possiamo cancellarlo dall'equazione. Rimangono ora gli altri termini che rappresentano i flussi di massa dell'atmosfera, a tal scopo si è scritta la massa ***M*** e non la massa ***m*** di una singola particella, proprio perché i flussi atmosferici, sono composti da una molteplicità di molecole che si muovono con stessa velocità, direzione e verso.

Passiamo ora in rassegna i moti atmosferici, notiamo che in generale i flussi zonali si controbilanciano, i flussi meridiani lo stesso, in pratica molti moti sono bilanciati abbastanza celermente e i relativi termini presenti nell'equazione 12 possono andare a zero; tuttavia altri moti atmosferici, ed i relativi termini nell'equazione, si annullano su scale temporali più lunghe, ad esempio i grandi spostamenti in massa dovuti ai centri pressori non si bilanciano perfettamente nel breve periodo, ma procediamo per passi temporali diversi.

Prima di continuare ricordiamo che una quantità statistica, e nel nostro caso specifico una quantità media nel tempo e nello spazio è tale solo per scale temporali e spaziali maggiori di quella che la definiscono. Ad esempio per una piccola superficie non ha senso fisico definire la pressione o la temperatura per scale temporali troppo piccole, queste sono quantità media spaziali e temporali, e lo stesso dicasi per il viriale.

Dall'andamento del campo elettrico di bel tempo e dal suo cambiare in maniera unisona su tutta la terra, notiamo che ci sono dei moti che non si bilanciano prima di 24 ore, infatti il massimo del campo elettrico si verifica intorno alle 7 pomeridiane (ora zulu), questo è dovuto all'attività temporalesca globale che è massima alla stessa ora e contribuisce a chiudere il circuito elettrico atmosferico, trasportando ioni positivi nell'atmosfera (ed a ciascuno di esso è associato un vettore spostamento), in ultima analisi il massimo di attività temporalesca è dovuto alla presenza diurna del sole sui continenti, e quindi al momento in cui il sole riscalda la maggior parte delle terre emerse distribuite disomogeneamente. In pratica lo sbilanciamento idrostatico della colonna atmosferica provoca un flusso netto di massa (e di pressione) che ha ciclicità giornaliera, ergo qualunque sia stato il mo-

mento per calcolare A_0, il bilanciamento dei vettori spostamento e quindi della validità del viriale non può verificarsi prima delle 24 ore.
Nell'atmosfera tuttavia ci sono molteplici moti che non vengono bilanciati nemmeno entro le 24 ore (in ogni caso non lo sarebbero alla perfezione per annullare il numeratore della 12), ci sono variazioni giornaliere e settimanali, flussi di masse d'aria stagionali (da un emisfero all'altro ad esempio), tutto ciò potrebbe apparire minoritario, in realtà tutti i flussi principali che si controbilanciano all'interno dell'equazione 12 vanno a zero, di conseguenza non danno alcun contributo all'annullamento dei termini minori i quali perciò rimangono gli unici importanti.
Nell'atmosfera terrestre c'è un'ultima classe di flussi, i flussi netti, quelli che non vengono mai bilanciati in alcun modo in seno all'atmosfera, ora vedremo alcuni esempi tangibili.



Uno degli esempi più classici di flusso netto riguarda il flusso di calore latente che si viene a creare tra varie zone della terra (figura di fianco rappresentante il flusso meridionale - Tratta dal Visconti). Vi sono zone in cui l'evaporazione prevale sulla precipitazione e viceversa, dal nostro punto di vista ci interessa notare che le molecole d'acqua viaggiano all'interno della atmosfera in maniera non bilanciata (dall'atmosfera ovviamente) fra zone distanti migliaia di km, con un disequilibrio tra emisferi, il che significa che dal nostro punto di vista che il relativo termine all'interno dell'equazione 12 cresce in maniera unidirezionale (usando le unita SI numericamente il numeratore cresce di milioni e il denominatore di migliaia, col risultato nettamente positivo).
Bisogna inoltre tenere presente che non conta assolutamente il fatto ad esempio che le molecole d'acqua vengano rimpiazzate, il vettore posizione una volta assegnato rimane per sempre con la molecola, e se questa esce dall'atmosfera c'è semplicemente una divergenza del flusso, che è una grave segnale per la mancanza della media uguale a zero che si cercava di ottenere. A tale riguardo c'è una altro flusso netto legato all'acqua, quello verticale, che porta le molecole nella parte alta dell'atmosfera dove spesso subiscono fotodissociazione da parte della radiazione solare, successivamente l'idrogeno che non si ricombina viene lentamente trasportato alla sommità dell'atmosfera e poi disperso nello spazio e da qui trascinato nello spazio dal flusso di particelle e fotoni del sole. In termini matematici possiamo dividere la massa di ciascuna molecola in due parti, in pratica sdoppiare il termine nell'equazione 12, di cui poi la parte del termine relativa all'ossigeno rimane in atmosfera (è la maggiore fonte di nuovo ossigeno) e quella relativa all'idrogeno si allontana all'infinito, portando all'infinito anche il valore del relativo termine (il numeratore va all'infinito più rapidamente del denominatore) e l'intera equazione 12.

In sostanza tutti i flussi netti impediscono all'equazione 12 di andare a zero, il che porta inesorabilmente all'inapplicabilità del teorema del viriale all'atmosfera, la cosa era in realtà facilmente prevedibile anche a colpo d'occhio, il teorema del viriale è stato elaborato da Clausius per spiegare le forze all'interno di un gas e non per spiegare la dinamica del gas rispetto a qualsivoglia sistema di riferimento, per quello esistono altre equazioni, come altre equazioni esistono per spiegare tutti gli

altri fenomeni, ed ogni equazione ha il suo ristretto campo di applicabilità oltre il quale è assolutamente sbagliato andare.
Il teorema del viriale è talvolta sinteticamente illustrato nei testi (che spiegano a parole le equazioni 6 ed 11), come il teorema che può essere applicato a tutti i sistemi in cui le grandezze ed il movimento delle particelle sono vincolate entro un certo spazio, ad esempio oltre alle molecole del gas in quiete che abbiamo visto, anche gli elettroni intorno ad un atomo, i pianeti intorno al sole e via dicendo. Dev'essere proprio questo concetto ad aver ingannato Miskolczi, infatti egli nel suo lavoro ritiene tale teorema applicabile all'atmosfera, in virtù del fatto che essa è vincolata gravitazionalmente alla terra, purtroppo per lui non è entrato nel merito di tale affermazione nel suo lavoro ed evidentemente non vi è entrato in assoluto, purché se lo avesse fatto si sarebbe reso conto dei flussi netti di cui l'atmosfera è piena, e di conseguenza dell'assoluta erroneità della sua affermazione.

Miskolczi nel suo lavoro ha fatto molte affermazioni erronee di questo genere, tutte buttate li senza nessuna analisi, ma visto che abbiamo analizzato uno dei punti cardine della sua ipotesi (non teoria), trovandolo difettoso, è inutile perdere altro tempo nell'enumerazione delle altre affermazioni.

Tore Cocco

Bibliografia

1) Alonso M., Finn E. J., *Elementi di fisica per l'universita*. Vol. 1 Masson.
Questo testo da pag. 416 espone una dimostrazione chiara e completa del viriale, dalla quale ho tratto spunto.

2) Castelfranchi G., *Fisica moderna*. 5 ed. Hoepli
Questo è un testo per chi vuole approfondire la teoria classica delle fluttuazioni in seno ad un gas, esposta al cap. 3

3) Wallace J. M., Hobbs P.V., *Atmospheric Science*. Accademic press
Un testo classico della fisica dell'atmosfera, che tratta piu o meno tutti gli argomenti principali in maniera semplice e chiara.

4) Visconti G., *Fondamenti di fisica e chimica dell'atmosfera.* Cuen
Questo testo è forse l'unico vero testo di fisica dell'atmosfera in lingua italiana, tratta molti argomenti, in alcune parti è esauriente, ma è meno chiaro e lineare del Wallace-Hobbs nella trattazione.